

ΜΑΘΗΜΑ 24

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

Παράγωγος και συνέχεια

Θεωρία

Ασκήσεις ύπαρξης παραγώγου

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ όταν και μόνο όταν

υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\in \mathbb{R}$

2.

Ορισμός

Παράγωγος συνάρτησης f στο $x_0 \in D_f$ λέγεται το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, το οποίο συμβολίζεται $f'(x_0)$.

3.

Στιγμιαία ταχύτητα κινητού

$$v(t_0) = S'(t_0)$$

4.

Θεώρημα

Αν συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε είναι συνεχής στο x_0 .

- * Το αντίστροφο δεν ισχύει
- * Αν συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Υπαρξη παραγώγου

1.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) = (x^2 - 4x + 3) f(x)$, να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Προτεινόμενη λύση

$$f \text{ συνεχής στο } x_0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x \neq 1 \text{ είναι } \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \frac{(x^2 - 4x + 3) f(x) - (1^2 - 4 \cdot 1 + 3) f(1)}{x - 1} \\ &= \frac{(x-1)(x-3) f(x) - 0}{x-1} \\ &= (x-3) f(x) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &\stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} [(x-3) f(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-3) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ &\stackrel{(1)}{=} (1-3) f(1) = -2 f(1) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Προσαρμογή σε
γνωστά όρια

Επομένως g παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

2.

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f(1) = 3$ και

$$f'(1) = -1, \text{ να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x f(x) - x^2 - 2x}{x^3 - 1}$$

Λύση

f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1 \Rightarrow$ συνεχής στο $1 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3 \quad (1)$$

$$f'(1) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = -1 \quad (2)$$

$$\text{Είναι } \frac{x f(x) - x^2 - 2x}{x^3 - 1} = \frac{x f(x) - x^2 - 3x + x}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{x(f(x) - 3) - x(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{x}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{(f(x) - 3) - (x - 1)}{x - 1}$$

$$= \frac{x}{x^2 + x + 1} \left[\frac{f(x) - 3}{x - 1} - 1 \right]$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x f(x) - x^2 - 2x}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x^2 + x + 1} \cdot \left(\frac{f(x) - 3}{x - 1} - 1 \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + x + 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - 3}{x - 1} - 1 \right]$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{1^2 + 1 + 1} (-1 - 1) = -\frac{2}{3}$$

Προσαρμογή σε
γνωστά όρια

3.

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$,
να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρείτε την $f'(0)$.

Προτεινόμενη λύση

$$f \text{ συνεχής στο } x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$.

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \quad \text{και} \quad f(x) = x g(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \cdot 2 = 0 \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f(0) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Είναι } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{(2)}{=} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ που έχει δοθεί ίσο με } 2$$

Άρα f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$

4.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$ και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2. \text{ Αν } h(x) = (x^2 + 2x + 3) f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \text{ να αποδείξετε}$$

ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρείτε τη $h'(0)$.

Προτεινόμενη λύση

$$f \text{ συνεχής στο } x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad (1)$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x \neq 0.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \quad \text{και} \quad f(x) = x g(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \cdot 2 = 0 \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f(0) = 0 \quad (2)$$

Η υπόθεση $h(x) = (x^2 + 2x + 3) f(x)$ για $x = 0$ δίνει

$$h(0) = (0^2 + 2 \cdot 0 + 3) f(0) \stackrel{(2)}{=} 3 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x + 3)f(x) - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x + 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \cdot 2 = 6 \end{aligned}$$

Άρα h παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $h'(0) = 6$

5.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 4$ και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x} - 2} = \ell \in \mathbb{R}. \quad \text{Αν } h(x) = x^2 f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{να αποδείξετε ότι η } h$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 4$ και να βρείτε την $h'(4)$, συναρτήσει του ℓ .

Προτεινόμενη λύση

$$f \text{ συνεχής στο } x_0 = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \quad (1)$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x} - 2}, \quad x \neq 4.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(x) = (\sqrt{x} - 2) g(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} - 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 4} g(x)$$

$$= 0 \cdot \ell$$

$$= 0 \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f(4) = 0 \quad (2)$$

Η υπόθεση $h(x) = x^2 f(x)$ για $x = 4$ δίνει

$$h(4) = 4^2 \cdot f(4)$$

$$\stackrel{(2)}{=} 16 \cdot 0$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{h(x) - h(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 f(x) - 0}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 f(x)}{(\sqrt{x})^2 - 2^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 f(x)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x} - 2} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{\sqrt{x} + 2} = \ell \cdot \frac{4^2}{\sqrt{4} + 2} = 4\ell$$

Άρα h παραγωγίσιμη στο $x_0 = 4$ με $h'(4) = 4\ell$

6.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{\eta \mu h} = \ell \in \mathbb{R}. \quad \text{Να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0$$

και να βρείτε την $f'(x_0)$ συναρτήσει του ℓ .

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} f \text{ συνεχής στο } x_0 &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \\ &\lim_{-h \rightarrow 0} f(x_0 - h) = f(x_0) \quad (\text{όπου } h \text{ θέσαμε } -h) \\ &\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h) = f(x_0) \quad (1) \quad (-h \rightarrow 0 \Rightarrow h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(h) = \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{\eta \mu h}$, $h \neq 0$

Τότε $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = \ell$ (2) και $f(x_0 - h) - f(x_0) = \eta \mu h \cdot g(h)$ άρα

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h) - f(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \eta \mu h \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(h) \\ &\stackrel{(2)}{=} 0 \cdot \ell = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x_0) = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\stackrel{(3)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h)}{h} \cdot \frac{\eta \mu h}{\eta \mu h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h)}{\eta \mu h} \cdot \frac{\eta \mu h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{\eta \mu h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta \mu h}{h} \\ &= \lim_{-h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h)}{\eta \mu(-h)} \cdot 1 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h)}{-\eta \mu h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h)}{\eta \mu h} = -\ell \end{aligned}$$

Προσαρμογή σε
γνωστά όρια

Άρα f παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = -\ell$

7.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και να βρείτε την $f'(x_0)$ συναρτήσει του ℓ .

Υπόδειξη.

Ακολουθήστε την προηγούμενη άσκηση.

Στην αλλαγή μεταβλητής, όπου $-2h$ θέτουμε h

8.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι
$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 f(x) - x^2 f(\alpha)}{x - \alpha} = \alpha^2 f'(\alpha) - 2\alpha f(\alpha)$$

Προτεινόμενη λύση

f παραγωγίσιμη στο $\alpha \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 f(x) - x^2 f(\alpha)}{x - \alpha} &= \frac{\alpha^2 f(x) - x^2 f(\alpha) + \alpha^2 f(\alpha) - \alpha^2 f(\alpha)}{x - \alpha} \\ &= \alpha^2 \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f(\alpha) \frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha} \\ &= \alpha^2 \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f(\alpha) \frac{(x - \alpha)(x + \alpha)}{x - \alpha} \\ &= \alpha^2 \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f(\alpha)(x + \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 f(x) - x^2 f(\alpha)}{x - \alpha} &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\alpha^2 \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f(\alpha)(x + \alpha) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\alpha^2 \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] - \lim_{x \rightarrow \alpha} [f(\alpha)(x + \alpha)] \\ &= \alpha^2 \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f(\alpha)(\alpha + \alpha) \\ &= \alpha^2 f'(\alpha) - 2\alpha f(\alpha) \end{aligned}$$

9.

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(\alpha) f(x) - g(x) f(\alpha)}{x - \alpha} = g(\alpha) f'(\alpha) - f(\alpha) g'(\alpha)$

Προτεινόμενη λύση

Για να δημιουργήσουμε τα γνωστά όρια, προσθαφαιρούμε το γινόμενο $f(\alpha) g(\alpha)$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} = g'(\alpha) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(\alpha) f(x) - g(x) f(\alpha)}{x - \alpha} &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(\alpha) f(x) - g(x) f(\alpha) + f(\alpha) g(\alpha) - f(\alpha) g(\alpha)}{x - \alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{[g(\alpha) f(x) - f(\alpha) g(\alpha)] - [g(x) f(\alpha) - f(\alpha) g(\alpha)]}{x - \alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(\alpha)[f(x) - f(\alpha)] - f(\alpha)[g(x) - g(\alpha)]}{x - \alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{g(\alpha)[f(x) - f(\alpha)]}{x - \alpha} - \frac{f(\alpha)[g(x) - g(\alpha)]}{x - \alpha} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(\alpha)[f(x) - f(\alpha)]}{x - \alpha} - \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(\alpha)[g(x) - g(\alpha)]}{x - \alpha} \\ &= g(\alpha) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f(\alpha) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} \\ &\stackrel{(1),(2)}{=} g(\alpha) f'(\alpha) - f(\alpha) g'(\alpha) \end{aligned}$$

10.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} = (\alpha - \beta) \cdot f'(0), \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^* \text{ με } \alpha \neq \beta.$$

Προτεινόμενη λύση

Για να δημιουργήσουμε τα γνωστά όρια, προσθαφαιρούμε το $f(0)$

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0 \Rightarrow \text{συνεχής στο } 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x) + f(0) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(\alpha x) - f(0)}{x} - \frac{f(\beta x) - f(0)}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x) - f(0)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\beta x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\alpha \frac{f(\alpha x) - f(0)}{\alpha x} \right] - \lim_{x \rightarrow 0} \left[\beta \frac{f(\beta x) - f(0)}{\beta x} \right] \end{aligned}$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha x \rightarrow 0$$

$$= \alpha \lim_{\alpha x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x) - f(0)}{\alpha x} - \beta \lim_{\beta x \rightarrow 0} \frac{f(\beta x) - f(0)}{\beta x}$$

Όπου αx το u
Όπου βx το v

$$= \alpha \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(0)}{u} - \beta \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(v) - f(0)}{v}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \alpha f'(0) - \beta f'(0) = (\alpha - \beta) \cdot f'(0)$$

11.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(3x) - f^2(x)}{x} = 4f'(0) \cdot f(0)$$

Προτεινόμενη λύση

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0 \Rightarrow \text{συνεχής στο } 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad (1)$$

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(3x) - f^2(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(3x) - f(x)}{x} [f(3x) + f(x)] \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [f(3x) + f(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(3x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Όπως στην άσκηση (10), βρίσκουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x} = (3 - 1) f'(0) = 2f'(0)$$

$$\text{Η (1)} \Rightarrow \lim_{3x \rightarrow 0} f(3x) = f(0) \quad (\text{θέσαμε όπου } x \text{ το } 3x)$$

$$\begin{aligned} (3) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(3x) - f^2(x)}{x} &= 2f'(0) \cdot [f(0) + f(0)] \\ &= 2f'(0) \cdot 2f(0) \\ &= 4f'(0) \cdot f(0) \end{aligned}$$

12.

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 f^3(x) + f(x) + 1 = x^3$, να αποδείξετε ότι $f'(1) = 3$.

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3$

Η υπόθεση $x^2 f^3(x) + f(x) + 1 = x^3$, για $x = 1$, δίνει

$$f^3(1) + f(1) + 1 = 1$$

$$f(1) [f^2(1) + 1] = 0 \Rightarrow f(1) = 0 \quad (1)$$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 3$

Η υπόθεση $x^2 f^3(x) + f(x) + 1 = x^3$, για $x \neq 1$, δίνει

$$x^2 f^3(x) + f(x) = x^3 - 1$$

$$f(x) [x^2 f^2(x) + 1] = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\frac{f(x)}{x - 1} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 f^2(x) + 1} \quad (2)$$

Επειδή όμως, f συνεχής στο $x_0 = 1$, θα είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \stackrel{(1)}{=} 0$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 f^2(x) + 1} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1^2 \cdot 0^2 + 1} = 3$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 f^2(x) + 1} = 3$$

13.

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει $f^3(x) - x f^2(x) + x^2 f(x) = x^2 \eta \mu x$, να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

Προτεινόμενη λύση

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0 \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ell \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Η υπόθεση $f^3(x) - x f^2(x) + x^2 f(x) = x^2 \eta \mu x$, για $x = 0$, δίνει

$$f^3(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \quad (2)$$

Η υπόθεση $f^3(x) - x f^2(x) + x^2 f(x) = x^2 \eta \mu x$, για $x \neq 0$, διαιρώντας τα δύο μέλη με το x^3 , δίνει

$$\frac{f^3(x)}{x^3} - \frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{f(x)}{x} = \frac{\eta \mu x}{x} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 - \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \frac{f(x)}{x} = \frac{\eta \mu x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 - \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\ell^3 - \ell^2 + \ell = 1$$

$$\ell^3 - \ell^2 + \ell - 1 = 0$$

$$\ell^2(\ell - 1) + (\ell - 1) = 0$$

$$(\ell - 1)(\ell^2 + 1) = 0 \Rightarrow \ell - 1 = 0 \Rightarrow \ell = 1$$

Επομένως $f'(0) = 1$

14.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$
- ii) Να αποδείξετε ότι $f(x-y) = f(x) - f(y)$
- iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
- iv) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 , να αποδείξετε ότι θα είναι παραγωγίσιμη στο κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

i)

$$\begin{aligned} \text{Για } x=y=0, \text{ η (1)} &\Rightarrow f(0+0) = f(0) + f(0) \\ &f(0) = 2f(0) \\ &f(0) = 0 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x-y+y) \\ &= f((x-y)+y) \\ &\stackrel{(1)}{=} f(x-y) + f(y) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f(x) = f(x-y) + f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = f(x-y) \quad (2)$$

iii)

$$\text{Στην (1), όπου } y \text{ θέτουμε } -y, \text{ οπότε } f(x-y) = f(x) + f(-y) \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow f(x) - f(y) = f(x) + f(-y)$$

$$\Rightarrow f(-y) = -f(y), \text{ άρα } f \text{ είναι περιττή}$$

iv)

$$\begin{aligned} f \text{ παραγωγίσιμη στο } 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \stackrel{(i)}{\Rightarrow} \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) + f(h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &\stackrel{(4)}{=} f'(0) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f'(a) = f'(0)$$

15.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$

ii) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

iii) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

iv) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι θα είναι παραγωγίσιμη στο κάθε $a \in \mathbb{R}^*$.

Προτεινόμενη λύση

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*. \quad (1)$$

i)

$$\begin{aligned} \text{Για } x = y = 1, \quad f(1) &\Rightarrow f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \\ f(1) &= 2f(1) \\ f(1) &= 0 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \\ f\left(\frac{x}{y}\right) &= f(x) - f(y) \quad (2) \end{aligned}$$

iii)

$$\text{H (2) για } x = 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) - f(y) \quad (3)$$

iv)

$$\begin{aligned} f \text{ παραγωγίσιμη στο } 1 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} &= f'(1) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} &= \lim_{\alpha h \rightarrow \alpha} \frac{f(\alpha h) - f(\alpha)}{\alpha h - \alpha} \quad (\text{θέσαμε } x = \alpha h, \text{ οπότε } h \rightarrow 1) \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(\alpha h) - f(\alpha)}{\alpha(h - 1)} \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\alpha} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(\alpha) + f(h) - f(\alpha)}{h - 1} \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h)}{h - 1} \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{\alpha} f'(1) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} f'(1)$$

16.

Για τις συναρτήσεις f, g δίνονται

i) f συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και όχι παραγωγίσιμη σ' αυτό

ii) g παραγωγίσιμη στο x_0

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $(f \cdot g)(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,

όταν και μόνο όταν $g(x_0) = 0$.

Προτεινόμενη λύση**Ευθύ**

Με υπόθεση $(f \cdot g)(x)$ παραγωγίσιμη στο x_0 , θα αποδείξουμε ότι $g(x_0) = 0$

Εργαζόμαστε με την απαγωγή σε άτοπο.

Έστω $g(x_0) \neq 0$, τότε $g(x) \neq 0$ κοντά στο x_0

Θέτουμε $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, οπότε $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ κοντά στο x_0

Επειδή, όμως, h και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , θα είναι και λόγος τους $\frac{h}{g}$

δηλαδή η f , παραγωγίσιμη στο x_0 , που είναι άτοπο.

Αντίστροφο

Με υπόθεση $g(x_0) = 0$, θα αποδείξουμε ότι $(f \cdot g)(x)$ παραγωγίσιμη στο x_0 .

f συνεχής στο $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

g παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ (σαν συνεχής στο x_0)

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0) \cdot 0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} \\ &= f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - 0}{x - x_0} \\ &= f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

Άρα $(f \cdot g)(x)$ παραγωγίσιμη στο x_0 .